07

त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाएँ (Trigonometric Indentities)

7.01 प्रस्तावना (Introduction)

हमने पूर्व अध्याय में त्रिकोणमितीय अनुपातों एवं उनमें पारस्परिक सम्बन्धों में अध्ययन किया है। इस अध्याय में त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाओं का अध्ययन करेंगे।

त्रिकोणमितीय सर्वसमिकायें:

त्रिकोणमितीय सर्वसमिका त्रिकोणमितीय सम्बन्धित कोणों के सभी मानों के लिए सत्य होती है। यहाँ निम्न सर्वसमिकाओं की उत्पत्ति पर विचार करते हैं।

आकृतिनुसार, ΔABC में $\angle B$ समकोण है। कोण θ के लिए, BC लम्ब, AB आधार व AC कर्ण होगा।

अतः $$BC^2 + AB^2 = AC^2 \qquad \ldots(1)$$

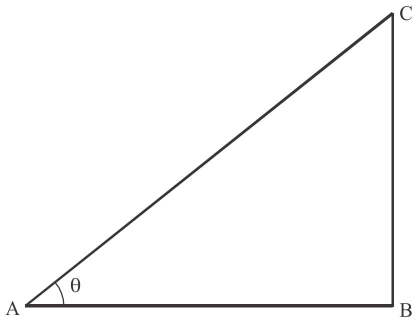
समीकरण (1) के प्रत्येक पद को AC^2 से भाग देने पर

$$\frac{BC^2}{AC^2} + \frac{AB^2}{AC^2} = \frac{AC^2}{AC^2}$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{BC}{AC}\right)^2 + \left(\frac{AB}{AC}\right)^2 = \left(\frac{AC}{AC}\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad (\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2 = 1$$

$$\Rightarrow \quad \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \qquad \ldots(2)$$



आकृति 7.01

यह सभी θ, जहाँ $0^o \le \theta \le 90^o$ के लिए सत्य होता है।

यह एक सर्वसमिका है,

अब समीकरण (1) के प्रत्येक पद को AB^2 से भाग देने पर

$$\frac{BC^2}{AB^2} + \frac{AB^2}{AB^2} = \frac{AC^2}{AB^2}$$

$$\left(\frac{BC}{AB}\right)^2 + \left(\frac{AB}{AB}\right)^2 = \left(\frac{AC}{AB}\right)^2$$

$$(\tan\theta)^2 + 1 = (\sec\theta)^2$$

$$\Rightarrow \quad \tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$$

$$\Rightarrow \quad 1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta \qquad \ldots(3)$$

अब समीकरण (1) के प्रत्येक पद को BC^2 से भाग देने पर

$$\frac{BC^2}{BC^2} + \frac{AB^2}{BC^2} = \frac{AC^2}{BC^2}$$

$$\left(\frac{BC}{BC}\right)^2 + \left(\frac{AB}{BC}\right)^2 = \left(\frac{AC}{BC}\right)^2$$

$$1+(\cot\theta)^2 = (\text{cosec}\,\theta^2)$$

$$1+\cot^2\theta = \text{cosec}^2\theta \quad \ldots(\text{iv})$$

उपरोक्त सर्वसमिकाओं को निम्न प्रकार लिख सकते हैं–

1. $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

   या $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$

   या $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$

2. $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$

   या $\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$

   या $\tan^2\theta = \sec^2\theta - 1$

3. $1 + \cot^2\theta = \text{cosec}^2\theta$

   या $\text{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = 1$

   या $\cot^2\theta = \text{cosec}^2 - 1$

सारणी

	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$	$\cot\theta$	$\sec\theta$	$\text{cosec}\,\theta$
$\sin\theta$	$\sin\theta$	$\sqrt{1-\cos^2\theta}$	$\frac{\tan\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}$	$\frac{1}{\sqrt{1+\cot^2\theta}}$	$\frac{\sqrt{\sec^2\theta-1}}{\sec\theta}$	$\frac{1}{\text{cosec}\,\theta}$
$\cos\theta$	$\sqrt{1-\sin^2\theta}$	$\cos\theta$	$\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}$	$\frac{\cot\theta}{\sqrt{1+\cot^2\theta}}$	$\frac{1}{\sec\theta}$	$\frac{\sqrt{\text{cosec}^2\theta-1}}{\text{cosec}\,\theta}$
$\tan\theta$	$\frac{\sin\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}$	$\frac{\sqrt{1-\cos^2\theta}}{\cos\theta}$	$\tan\theta$	$\frac{1}{\cot\theta}$	$\sqrt{\sec^2\theta-1}$	$\frac{1}{\sqrt{\text{cosec}^2\theta-1}}$
$\cot\theta$	$\frac{\sqrt{1-\sin^2\theta}}{\sin\theta}$	$\frac{\cos\theta}{\sqrt{1-\cos^2\theta}}$	$\frac{1}{\tan\theta}$	$\cot\theta$	$\frac{1}{\sqrt{\sec^2\theta-1}}$	$\sqrt{\text{cosec}^2\theta-1}$
$\sec\theta$	$\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}$	$\frac{1}{\cos\theta}$	$\sqrt{1+\tan^2\theta}$	$\frac{\sqrt{1+\cot^2\theta}}{\cot\theta}$	$\sec\theta$	$\frac{\text{cosec}\,\theta}{\sqrt{\text{cosec}^2\theta-1}}$
$\text{cosec}\,\theta$	$\frac{1}{\sin\theta}$	$\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2\theta}}$	$\frac{\sqrt{1+\tan^2\theta}}{\tan\theta}$	$\sqrt{1+\cot^2\theta}$	$\frac{\sec\theta}{\sqrt{\sec^2\theta-1}}$	$\text{cosec}\,\theta$

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-1. सिद्ध किजिए कि $\cot\theta + \tan\theta = \text{cosec}\,\theta\sec\theta$

हल: LHS (वाम पक्ष) $= \cot\theta + \tan\theta$

$$= \frac{\cos\theta}{\sin\theta} + \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\cos^2\theta + \sin^2\theta}{\sin\theta\cos\theta} \qquad (\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1)$$

$$= \frac{1}{\sin\theta\cos\theta} = \frac{1}{\sin\theta}\cdot\frac{1}{\cos\theta}$$

$= \operatorname{cosec}\theta \cdot \sec\theta$ = RHS दक्षिण पक्ष

उदाहरण-2. सिद्ध किजिए कि $(1+\tan^2\theta)(1+\sin\theta)(1-\sin\theta) = 1$

हल: LHS (वाम पक्ष) $= (1+\tan^2\theta)(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)$

$$= (1+\tan^2\theta)(1-\sin^2\theta)$$

$$= \sec^2\theta\cos^2\theta$$

$$= \frac{1}{\cos^2\theta}\cdot\cos^2\theta$$

$= 1 =$ RHS (दक्षिण पक्ष)

उदाहरण-3. सिद्ध किजिए कि $\frac{1}{1+\sin\theta} + \frac{1}{1-\sin\theta} = 2\sec^2\theta$

हल: LHS (वाम पक्ष) $= \frac{1}{1+\sin\theta} + \frac{1}{1-\sin\theta}$

$$= \frac{1-\sin\theta+1+\sin\theta}{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}$$

$$= \frac{2}{1-\sin^2\theta} = \frac{2}{\cos^2\theta} = 2\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}$$

$= 2\sec^2\theta$ = RHS (दक्षिण पक्ष)

उदाहरण-4. सिद्ध किजिए कि $\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}} = \operatorname{cosec}\theta + \cot\theta$

हल: LHS (वाम पक्ष) $= \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}}$

अंश व हर को $\sqrt{1+\cos\theta}$ से गुणा करने पर

$$\sqrt{\frac{(1+\cos\theta)}{(1-\cos\theta)}\times\frac{(1+\cos\theta)}{(1+\cos\theta)}}$$

$$= \sqrt{\frac{(1+\cos\theta)^2}{1-\cos^2\theta}} = \sqrt{\frac{(1+\cos\theta)^2}{\sin^2\theta}}$$

$$= \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{1}{\sin\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$= \operatorname{cosec}\theta + \cot\theta$ = RHS दक्षिण पक्ष

उदाहरण-5. सिद्ध किजिए कि $\left(\sec\theta-\tan\theta\right)^2=\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}$

हल: LHS (वाम पक्ष) $=\left(\sec\theta-\tan\theta\right)^2$

$$=\left(\frac{1}{\cos\theta}-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)^2=\left(\frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}\right)^2$$

$$=\frac{\left(1-\sin\theta\right)^2}{\cos^2\theta}=\frac{\left(1-\sin\theta\right)^2}{1-\sin^2\theta}$$

$$=\frac{\left(1-\sin\theta\right)\left(1-\sin\theta\right)}{\left(1-\sin\theta\right)\left(1+\sin\theta\right)}$$

$=\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}=$ RHS (दक्षिण पक्ष)

उदाहरण-6. सिद्ध कीजिए कि $\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}+\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}=2\operatorname{cosec}\theta$

हल: LHS (वाम पक्ष) $=\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}+\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}$

$$=\frac{\sin^2\theta+\left(1+\cos\theta\right)^2}{\sin\theta\left(1+\cos\theta\right)}$$

$$=\frac{\sin^2\theta+1+\cos^2\theta+2\cos\theta}{\sin\theta\left(1+\cos\theta\right)}$$

$$=\frac{1+\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\cos\theta}{\sin\theta\left(1+\cos\theta\right)}$$

$$=\frac{1+1+2\cos\theta}{\sin\theta\left(1+\cos\theta\right)}=\frac{2+2\cos\theta}{\sin\theta\left(1+\cos\theta\right)}$$

$$=\frac{2\left(1+\cos\theta\right)}{\sin\theta\left(1+\cos\theta\right)}=\frac{2}{\sin\theta}=2\cdot\frac{1}{\sin\theta}$$

$=2\operatorname{cosec}\theta=$ RHS (दक्षिण पक्ष)

उदाहरण-7. सिद्ध कीजिए $\frac{\sin\theta-2\sin^3\theta}{2\cos^3\theta-\cos\theta}=\tan\theta$

हल: LHS (वाम पक्ष) $=\frac{\sin\theta-2\sin^3\theta}{2\cos^3\theta-\cos\theta}$

$$=\frac{\sin\theta\left(1-2\sin^2\theta\right)}{\cos\theta\left(2\cos^2\theta-1\right)}$$

$$=\frac{\sin\theta\left[\sin^2\theta+\cos^2\theta-2\sin^2\theta\right]}{\cos\theta\left[2\cos^2\theta-\left(\sin^2\theta+\cos^2\theta\right)\right]}\quad\left(\because\ \sin^2\theta+\cos^2\theta=1\right)$$

$$=\frac{\sin\theta\left[\cos^2\theta-\sin^2\theta\right]}{\cos\theta\left[\cos^2\theta-\sin^2\theta\right]}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$=\tan\theta\ =$ RHS (दक्षिण पक्ष)

उदाहरण-8. सिद्ध कीजिए कि $\frac{1+\sec A}{\sec A}=\frac{\sin^2 A}{1-\cos A}$

हल: LHS (वाम पक्ष) $=\frac{1+\sec A}{\sec A}$

$$=\frac{1+\frac{1}{\cos A}}{\frac{1}{\cos A}}=\frac{\frac{\cos A+1}{\cos A}}{\frac{1}{\cos A}}=\frac{\cos A+1}{\cos A}\times\frac{\cos A}{1}$$

$$=\frac{1+\cos A}{1}$$

$$=\frac{(1+\cos A)(1-\cos A)}{1-\cos A}$$ {अंश व हर में $(1-\cos A)$ से गुणा करने पर}

$$=\frac{(1)^2-(\cos A)^2}{1-\cos A}=\frac{1-\cos^2 A}{1-\cos A}$$

$=\frac{\sin^2 A}{1-\cos A}$ = RHS (दक्षिण पक्ष) $\left(\because\ 1-\cos^2 A=\sin^2 A\right)$

उदाहरण-9. सिद्ध कीजिए कि $\cos^4\theta-\sin^4\theta=1-2\sin^2\theta$

हल: LHS (वाम पक्ष) $=\cos^4\theta-\sin^4\theta$

$=\left(\cos^2\theta\right)^2-\left(\sin^2\theta\right)^2$

$=\left(\cos^2\theta+\sin^2\theta\right)\left(\cos^2\theta-\sin^2\theta\right)$ $\quad\because\quad a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

$=1\cdot\left(\cos^2\theta-\sin^2\theta\right)$ $\quad\because\quad \sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

$=1\cdot\left(1-\sin^2\theta-\sin^2\theta\right)=1-2\sin^2\theta=$ RHS (दक्षिण पक्ष)

उदाहरण-10. यदि $\sin\theta+\cos\theta=p$ और $\sec\theta+\operatorname{cosec}\theta=q$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि $q\left(p^2-1\right)=2p$

हल: LHS (वाम पक्ष) $=q\left(p^2-1\right)$

p व q का मान रखने पर $=\left(\sec\theta+\operatorname{cosec}\theta\right)\left[\left(\sin\theta+\cos\theta\right)^2-1\right]$

$$=\left(\frac{1}{\cos\theta}+\frac{1}{\sin\theta}\right)\left[\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta-1\right]$$

$$=\left(\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta\cos\theta}\right)[1+2\sin\theta\cos\theta-1]$$

$$=\left[\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta\cdot\cos\theta}\right]\times(2\sin\theta\cos\theta)$$

$$=2[\sin\theta+\cos\theta]=2p=\text{RHS (दक्षिण पक्ष)}$$

उदाहरण-11. सिद्ध कीजिए कि $\dfrac{\cot A+\operatorname{cosec}A-1}{\cot A-\operatorname{cosec}A+1}=\dfrac{1+\cos A}{\sin A}$

हल: LHS (वाम पक्ष) $=\dfrac{\cot A+\operatorname{cosec}A-1}{\cot A-\operatorname{cosec}A+1}$

$$=\frac{(\cot A+\operatorname{cosec}A)-(\operatorname{cosec}^2 A-\cot^2 A)}{\cot A-\operatorname{cosec}A+1}\qquad(\because\ \operatorname{cosec}^2 A-\cot^2 A=1)$$

$$=\frac{(\operatorname{cosec}A+\cot A)-[(\operatorname{cosec}A+\cot A)(\operatorname{cosec}A-\cot A)]}{\cot A-\operatorname{cosec}A+1}$$

$$=\frac{(\operatorname{cosec}A+\cot A)[1-(\operatorname{cosec}A-\cot A)]}{\cot A-\operatorname{cosec}A+1}$$

$$=\frac{(\operatorname{cosec}A+\cot A)[\cot A-\operatorname{cosec}A+1]}{(\cot A-\operatorname{cosec}A+1)}$$

$$=\operatorname{cosec}A+\cot A$$

$$=\frac{1}{\sin A}+\frac{\cos A}{\sin A}=\frac{1+\cos A}{\sin A}=\text{RHS (दक्षिण पक्ष)}$$

उदाहरण-12. सिद्ध कीजिए कि $\left(\dfrac{1+\tan^2 A}{1+\cot^2 A}\right)=\left(\dfrac{1-\tan A}{1-\cot A}\right)^2=\tan^2 A$

हल: LHS (वाम पक्ष) $=\dfrac{1+\tan^2 A}{1+\cot^2 A}=\dfrac{\sec^2 A}{\operatorname{cosec}^2 A}$

$$=\left[\frac{\sec A}{\operatorname{cosec}A}\right]^2=\left[\frac{1/\cos A}{1/\sin A}\right]^2=\left[\frac{1}{\cos A}\times\frac{\sin A}{1}\right]^2$$

$$=\left[\frac{\sin A}{\cos A}\right]^2=[\tan A]^2=\tan^2 A=\text{RHS (दक्षिण पक्ष)}$$

अब $\left[\dfrac{1-\tan A}{1-\cot A}\right]^2=\left[\dfrac{1-\dfrac{\sin A}{\cos A}}{1-\dfrac{\cos A}{\sin A}}\right]^2=\left[\dfrac{\dfrac{\cos A-\sin A}{\cos A}}{\dfrac{\sin A-\cos A}{\sin A}}\right]^2$

$$= \left[\frac{\cos A - \sin A}{\cos A} \times \frac{\sin A}{\sin A - \cos A} \right]^2 = \left[-\frac{(\sin A - \cos A)}{\cos A} \times \frac{\sin A}{(\sin A - \cos A)} \right]^2$$

$$= \left[-\frac{\sin A}{\cos A} \right]^2 = [-\tan A]^2 = \tan^2 A = \text{RHS (दक्षिण पक्ष)}$$

प्रश्नमाला 7.1

1. $\angle\theta$ के लिए सभी त्रिकोणमितीय अनुपातों को $\sec\theta$ के पदों में व्यक्त कीजिए।

2. त्रिकोणमितीय अनुपातों $\sin\theta, \sec\theta, \tan\theta$ को $\cot\theta$ के पदों में व्यक्त कीजिए।

निम्नलिखित को सर्वसमिकाओं की सहायता से सिद्ध कीजिए।

3. $\cos^2\theta + \cos^2\theta\cot^2\theta = \cot^2\theta$

4. $\sec\theta(1-\sin\theta)(\sec\theta+\tan\theta) = 1$

7. $\operatorname{cosec}^2\theta + \sec^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta\sec^2\theta$

6. $\sqrt{\dfrac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}} = \sec\theta - \tan\theta$

7. $\sqrt{\sec^2\theta + \operatorname{cosec}^2\theta} = \tan\theta + \cot\theta$

8. $\dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{\cot\alpha + \cot\beta} = \tan\alpha\tan\beta$

9. $\dfrac{1+\sin\theta}{\cos\theta} = \dfrac{\cos\theta}{1+\sin\theta} = 2\sec\theta$

10. $\dfrac{\sin^4\theta - \cos^4\theta}{\sin^2\theta - \cos^2\theta} = 1$

11. $\cot\theta - \tan\theta = \dfrac{1-2\sin^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$

12. $\cos^4\theta + \sin^4\theta = 1 - 2\cos^2\theta\sin^2\theta$

13. $(\sec\theta - \cos\theta)(\cot\theta + \tan\theta) = \tan\theta\sec\theta$

14. $\dfrac{1-\tan^2\alpha}{\cot^2\alpha - 1} = \tan^2\alpha$

15. $\dfrac{\sin\theta}{1-\cos\theta} = \dfrac{1+\cos\theta}{\sin\theta}$

16. $\sin^6\theta + \cos^6\theta = 1 - 3\sin^2\theta\cos^2\theta$

17. $\dfrac{\tan\theta}{1-\cot\theta} + \dfrac{\cot\theta}{1-\tan\theta} = 1 + \tan\theta + \cot\theta$

18. $\sin\theta(1+\tan\theta) + \cos\theta(1+\cot\theta) = \operatorname{cosec}\theta + \sec\theta$

19. $\sin^2\theta\cos\theta+\tan\theta\sin\theta+\cos^3\theta=\sec\theta$

20. $\dfrac{\tan\theta}{1-\cot\theta}+\dfrac{\cot\theta}{1-\tan\theta}=1+\sec\theta\,\text{cosec}\,\theta$

21. $(\sin A+\text{cosec}A)^2+(\cos A+\sec A)^2=7+\tan^2 A+\cot^2 A$

22. $\sin^8\theta-\cos^8\theta=(\sin^2\theta-\cos^2\theta)(1-2\sin^2\theta\cos^2\theta)$

23. $\sqrt{\dfrac{\sec\theta+1}{\sec\theta-1}}=\cot\theta+\text{cosec}\,\theta$

24. $\dfrac{(1+\cot\theta+\tan\theta)(\sin\theta-\cos\theta)}{\sec^3\theta-\text{cosec}^3\theta}=\sin^2\theta\cos^2\theta$

27. $\dfrac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta-\cos\theta}+\dfrac{\sin\theta-\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta}=\dfrac{2}{1-2\cos^2\theta}=\dfrac{2}{2\sin^2\theta-1}$

26. $\dfrac{\cos A}{1-\tan A}+\dfrac{\sin A}{1-\cot A}=\sin A+\cos A$

27. $(\text{cosec}A-\sin A)(\sec A-\cos A)=\dfrac{1}{\tan A+\cot A}$

28. $\dfrac{\cos^2\theta}{1-\tan\theta}+\dfrac{\sin^3\theta}{\sin\theta-\cos\theta}=1+\sin\theta\cos\theta$

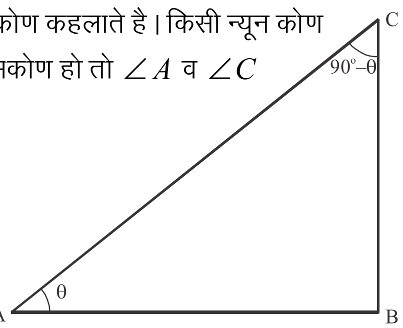
29. यदि $\sec\theta+\tan\theta=P$ हो, तो सिद्ध करो कि $\dfrac{P^2-1}{P^2+1}=\sin\theta$

30. यदि $\dfrac{\cos A}{\cos B}=m$ तथा $\dfrac{\cos A}{\sin B}=n$ हो, तो सिद्ध कीजिए $(m^2+n^2)\cos^2 B=n^2$

पूरक कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपात

पूरक कोण

यदि दो कोणों का योग 90° हो तो दोनों कोण एक दूसरे के पूरक कोण कहलाते है। किसी न्यून कोण θ का पूरक कोण $(90^\circ-\theta)$ होगा। समकोण ΔABC में $\angle B$ समकोण हो तो $\angle A$ व $\angle C$ का योफल समकोण होगा।



आकृति 7.02

$$\angle A+\angle C=90^\circ$$

यदि $\angle A=\theta$ तो

$\angle C=90^\circ-\theta$ होगा

अतः θ व $90^\circ-\theta$ परस्पर पूरक कोण होंगे

समकोण ΔABC में कोण θ के लिए भुजा BC तथा AB क्रमशः लम्ब व आधार होंगे।

समकोण ΔABC में $(90^\circ-\theta)$ के लिए भुजा AB तथा BC क्रमशः लम्ब व आधार होंगे।

अतः ΔABC में को $(90^\circ-\theta)$ व θ के लिए त्रिकोणमिती अनुपात

$\sin(90^\circ-\theta)=\dfrac{AB}{AC}$ $\qquad$ $\sin\theta=\dfrac{BC}{AC}$

$$\cos(90^\circ-\theta)=\frac{BC}{AC} \qquad \cos\theta=\frac{AB}{AC}$$

$$\tan(90^\circ-\theta)=\frac{AB}{BC} \qquad \tan\theta=\frac{BC}{AB}$$

$$\cot(90^\circ-\theta)=\frac{BC}{AB} \qquad \cot\theta=\frac{AB}{BC}$$

$$\sec(90^\circ-\theta)=\frac{AC}{BC} \qquad \sec\theta=\frac{AC}{AB}$$

$$\operatorname{cosec}(90^\circ-\theta)=\frac{AC}{AB} \qquad \operatorname{cosec}\theta=\frac{AC}{BC}$$

उपर्युक्त समीकरणों की तुलना करने पर

$$\sin(90^\circ-\theta)=\cos\theta \qquad \cos(90^\circ-\theta)=\sin\theta$$

$$\tan(90^\circ-\theta)=\cot\theta \qquad \cot(90^\circ-\theta)=\tan\theta$$

$$\sec(90^\circ-\theta)=\operatorname{cosec}\theta \qquad \operatorname{cosec}(90^\circ-\theta)=\sec\theta$$

जब $0^\circ \le \theta \le 90^\circ$

टिप्पणी: हम कह सकते हैं कि

किसी कोण का sin = उसके पूरक कोण का cos

किसी कोण का tan = उसके पूरक कोण का cot

किसी कोण का sec = उसके पूरक कोण का cosec

इनका विलोम भी सत्य है।

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-13. $\dfrac{\tan 49^\circ}{\cot 41^\circ}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल: $\tan 49^\circ = \cot(90^\circ-49^\circ)=\cot 41^\circ \qquad \{\tan\theta=\cot(90-\theta)\}$

$$\therefore \quad \frac{\tan 49^\circ}{\cot 41^\circ}=\frac{\cot 41^\circ}{\cot 41^\circ}=1$$

उदाहरण-14. $\sin^2 50^\circ+\sin^2 40^\circ$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल: $\because \quad 40^\circ = 90^\circ-50^\circ$

$\therefore \quad \sin 40^\circ=\sin(90^\circ-50^\circ)=\cos 50^\circ$

अतः $\sin^2 50^\circ+\sin^2 40^\circ=\sin^2 50^\circ+\cos^2 50^\circ=1 \qquad (\because \sin^2\theta+\cos^2\theta=1)$

उदाहरण-15. $\tan 39^\circ-\cot 51^\circ$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल: $\tan 39^\circ=\cot(90-39^\circ)=\cot 51^\circ$

अतः $\tan 39^\circ-\cot 51^\circ=\cot 51^\circ-\cot 51^\circ=0$

उदाहरण-16. $\sec 50^\circ \sin 40^\circ + \cos 40^\circ \operatorname{cosec} 50^\circ$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल: $\sec 50^\circ \sin 40^\circ + \cos 40^\circ \operatorname{cosec} 50^\circ$

$$= \operatorname{cosec} 40^\circ \sin 40^\circ + \cos 40^\circ \operatorname{cosec}\left(90^\circ - 40^\circ\right)$$

$$= \operatorname{cosec} 40^\circ \sin 40^\circ + \cos 40^\circ \sec 40^\circ$$

$$= \frac{1}{\sin 40^\circ} \cdot \sin 40^\circ + \cos 40^\circ \cdot \frac{1}{\cos 40^\circ} = 1 + 1 = 2$$

उदाहरण-17. सिद्ध कीजिए $\tan 15^\circ \tan 20^\circ \tan 70^\circ \tan 75^\circ = 1$

हल: वाम पक्ष (LHS) $= \tan 15^\circ \tan 20^\circ \tan 70^\circ \tan 75^\circ$

$$= \tan 15^\circ \tan 20^\circ \tan\left(90^\circ - 20\right) \tan\left(90^\circ - 15^\circ\right)$$

$$= \tan 15^\circ \tan 20^\circ \cdot \cot 20^\circ \cdot \cot 15^\circ$$

$$= \tan 15^\circ \tan 20^\circ \cdot \frac{1}{\tan 20^\circ \tan 15^\circ} = 1 \text{ (RHS)}$$

उदाहरण-18. यदि $\tan 2A = \cot\left(A - 18^\circ\right)$ हो तो A का मान ज्ञात कीजिए।

हल:

$$\tan 2A = \tan\left[90 - \left(A - 18^\circ\right)\right]$$

$$\tan 2A = \tan\left(108 - A\right)$$

$$\therefore \quad 2A = 108^\circ - A$$

$$3A = 108^\circ \Rightarrow A = 36^\circ$$

उदाहरण-19. निम्न समीकरण से x का मान ज्ञात कीजिए?

$$\operatorname{cosec}\left(90^\circ - \theta\right) + x \cos\theta \cot\left(90^\circ - \theta\right) = \sin\left(90^\circ - \theta\right)$$

हल:

$$\operatorname{cosec}\left(90^\circ - \theta\right) + x \cos\theta \cot\left(90^\circ - \theta\right) = \sin\left(90^\circ - \theta\right)$$

$$\sec\theta + x \cos\theta \tan\theta = \cos\theta$$

$$x \sin\theta = \cos\theta - \sec\theta \qquad \left(\because \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)$$

$$x = \frac{\cos\theta - \sec\theta}{\sin\theta} = \frac{\cos^2\theta - 1}{\sin\theta\cos\theta} \qquad \left(\because \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}\right)$$

$$= -\left[\frac{1 - \cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}\right] \qquad \left(\because 1 - \cos^2\theta = \sin^2\theta\right)$$

$$= -\frac{\sin^2\theta}{\sin\theta\cos\theta} \qquad x = -\tan\theta$$

प्रश्नमाला 7.2

निम्नलिखित के मान ज्ञात करो।

1. (i) $\frac{\cos 37^\circ}{\sin 53^\circ}$ (ii) $\frac{\operatorname{cosec} 32^\circ}{\sec 58^\circ}$ (iii) $\frac{\tan 10^\circ}{\cot 80^\circ}$ (iv) $\frac{\cos 19^\circ}{\sin 71^\circ}$

2. (i) $\operatorname{cosec} 25^\circ - \sec 65^\circ$ (ii) $\cot 34^\circ - \tan 56^\circ$

   (iii) $\frac{\sin 36^\circ}{\cos 54^\circ} - \frac{\sin 54^\circ}{\cos 36^\circ}$ (iv) $\sin\theta\cos(90^\circ - \theta) + \cos\theta\sin(90^\circ - \theta)$

3. (i) $\sin 70^\circ \sin 20^\circ - \cos 20^\circ \operatorname{cosec} 70^\circ$ (ii) $\frac{2\cos 67^\circ}{\sin 23^\circ} - \frac{\tan 40^\circ}{\cot 50^\circ} - \cos 60^\circ$

4. (i) $\left(\frac{\sin 35^\circ}{\cos 55^\circ}\right)^2 + \left(\frac{\cos 55^\circ}{\sin 35^\circ}\right)^2 - 2\cos 60^\circ$ (ii) $\left(\frac{\sin 27^\circ}{\cos 63^\circ}\right)^2 + \left(\frac{\cos 63^\circ}{\sin 27^\circ}\right)^2$

5. (i) $\cot 12^\circ \cot 38^\circ \cot 52^\circ \cot 60^\circ \cot 78^\circ$ (ii) $\tan 5^\circ \tan 25^\circ \tan 30^\circ \tan 45^\circ \tan 65^\circ \tan 85^\circ$

6. निम्न को 0° से 45° के कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपदों के पदों में व्यक्त कीजिए

   (i) $\sin 81^\circ + \sin 71^\circ$ (ii) $\tan 68^\circ + \sec 68^\circ$

निम्नलिखित को सिद्ध कीजिए:

7. $\sin 65^\circ + \cos 25^\circ = 2\cos 25^\circ$

8. $\sin 35^\circ \sin 55^\circ - \cos 35^\circ \cos 55^\circ = 0$

9. $\frac{\cos 70^\circ}{\sin 20^\circ} + \frac{\cos 59^\circ}{\sin 31^\circ} - 8\sin^2 30^\circ = 0$

10. $\sin(90^\circ - \theta)\cos(90^\circ - \theta) = \frac{\tan\theta}{1 + \tan^2\theta}$

11. $\frac{\cos(90^\circ - \theta)\cos\theta}{\tan\theta} + \cos^2(90^\circ - \theta) = 1$

12. $\frac{\tan(90^\circ - \theta)\cot\theta}{\operatorname{cosec}^2\theta} - \cos^2\theta = 0$

13. $\frac{\cos(90^\circ - \theta)\sin(90^\circ - \theta)}{\tan(90^\circ - \theta)} = \sin^2\theta$

14. $\frac{\sin\theta\cos(90^\circ - \theta)\cos\theta}{\sec(90^\circ - \theta)} + \frac{\cos\theta\sin(90^\circ - \theta)\sin\theta}{\operatorname{cosec}(90^\circ - \theta)} = \sin\theta\cos\theta$

17. यदि $\sin 3\theta = \cos(\theta - 6^\circ)$ यहाँ 3θ और $(\theta - 6^\circ)$ न्यूकोण है तो θ का मान ज्ञात कीजिए।

16. यदि $\sec 5\theta = \operatorname{cosec}(\theta - 36^\circ)$ यहाँ 5θ एक न्यूकोण है तो θ का मान ज्ञात कीजिए।

17. यदि A, B और C किसी त्रिभुज ABC के अन्तः कोण हो तो सिद्ध कीजिए कि $\tan\left(\frac{B+C}{2}\right) = \cot\frac{A}{2}$

18. यदि $\cos 2\theta = \sin 4\theta$ हो और 2θ व 4θ न्यूनकोण हो तो θ का मान ज्ञात कीजिए।

उत्तरमाला

प्रश्नमाला 7.1

1. $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{\sec^2\theta - 1}}{\sec\theta}$, $\cos\theta = \dfrac{1}{\sec\theta}$, $\tan\theta = \sqrt{\sec^2\theta - 1}$, $\cot\theta = \dfrac{1}{\sqrt{\sec^2\theta - 1}}$, $\operatorname{cosec}\theta = \dfrac{\sec\theta}{\sqrt{\sec^2\theta - 1}}$

2. (i) $\sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{1+\cot^2\theta}}$, $\tan\theta = \dfrac{1}{\cot\theta}$, $\sec\theta = \dfrac{\sqrt{1+\cot^2\theta}}{\cot\theta}$

प्रश्नमाला 7.2

1. (1) 1 (ii) 1 (iii) 1 (iv) 1

2. (i) 0 (ii) 0 (iii) 0 (iv) 1

3. (i) 0 (ii) 1 / 2

4. (i) 1 (ii) 2

5. (i) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ (ii) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

6. (i) $\cos 9^\circ + \cos 19^\circ$ (ii) $\cot 22^\circ + \operatorname{cosec} 22^\circ$

15. $\theta = 24^\circ$

16. $\theta = 21^\circ$

18. $\theta = 15^\circ$