03

बहुपद (Polynomials)

3.01 प्रस्तावना

एक चर वाले बहुपदों एवं उनकी घातों (Degree) के बारे में हम पिछली कक्षा में पढ़ चुके हैं। हम जानते हैं कि चर के लिए बहुपद $f(x)$ में x की उच्चतम घात बहुपद की घात कहलाती है एवं घात के आधार पर बहुपद की पहचान होती है कि यह रैखिक है, द्विघातीय है या त्रिघातीय है। इस प्रकार व्यापक रूप में चर x के लिए $f(x)=ax+b$ रैखिक, $f(x)=ax^2+bx+c$ द्विघातीय एवं $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ एक त्रिघातीय बहुपद कहलाते हैं जहाँ a, b, c, d वास्तविक संख्याएँ तथा $a \neq 0$ है। इस प्रकार चर x के लिए n घातीय बहुपद निम्न प्रकार परिभाषित किया जाता है।

$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$ जहाँ 'n' एक प्राकृत संख्या है तथा $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ वास्तविक संख्याएँ हैं। $a_nx^n, a_{x-1}x^{n-1}, \ldots, a_1x, a_0$ इस बहुपद के पद (terms) कहलाते हैं तथा $a_n, a_{n-1}, \ldots a_1, a_0$ इन पदों के गुणांक (co-efficient) कहलाते हैं।

इस अध्याय में हम बहुपदों के शून्यकों, गुणांकों एवं विभाजन एल्गोरिथम का अध्ययन करेंगे। साथ ही द्विघातीय समीकरणों के हल एवं उनके मूलों की प्रकृति के बारे में पढ़ेगे। पिछली कक्षाओं में हमने वास्तविक संख्याओं के महत्तम समापवर्तक एवं लघुत्तम समापवर्तक ज्ञात किये थे। यहाँ हम बीजीय व्यंजकों के लिए महत्तम समापवर्तक (HCF) तथा लघुत्तम समापवर्तक (LCM) ज्ञात करेंगे।

3.02 बहुपद के शून्यक

बहुपद $f_1(x)=4x+2, f_2(x)=2x^2+3x-\frac{2}{5}, f_3(x)=2-x^3$ के बारे में विचार करते हैं। ये क्रमशः रैखिक, द्विघात एवं त्रिघात बहुपद के उदाहरण हैं। बहुपद $f_1(x), f_2(x)$ एवं $f_3(x)$ में $x=2$ रखने पर हम इन बहुपदों के निम्न मान प्राप्त करते है।

$$f_1(2)=4\times2+2=10$$

$$f_2(2)=2\times2^2+3\times2-\frac{2}{5}=8+6-\frac{2}{5}=\frac{68}{5}$$

$$f_3(2)=2-2^3=-6$$

इस प्रकार x के भिन्न–भिन्न मान रखने पर बहुपदों के भिन्न–भिन्न प्राप्त होते हैं। अतः हम कह सकते हैं कि

यदि $f(x)$, चर x में एक बहुपद हैं तथा 'a' कोई वास्तविक संख्या है, तो $f(x)$ में x को 'a' से प्रतिस्थापित करके प्राप्त की गई वास्तविक संख्या, बहुपद $f(x)$ का $x=a$ पर मान कहलाती है तथा इसे $f(a)$ द्वारा निरूपित किया जाता है।

आइये हम द्विघात बहुपद $f(x)=2x^2-8x+6$ के $x=1$ एवं $x=3$ पर मान ज्ञात करते हैं। यहाँ

$$f(1)=2\times1-8\times1+6=0$$

$$f(3)=2\times3^2-8\times3+6=0$$

चूँकि बहुपद $f(x)$ के $x=1$ एवं $x=3$ पर मान शून्य प्राप्त होते हैं अतः 1 और 3 को द्विघात बहुपद $f(x)=2x^2-8x+6$ के 'शून्यक' कहते हैं। व्यापक रूप में हम शून्यक को इस प्रकार परिभाषित कर सकते हैं कि एक वास्तविक संख्या 'a' बहुपद $f(x)$ का एक 'शून्यक' होगा, यदि और केवल यदि $f(a)=0$ है।

माना रैखिक बहुपद $f(x) = ax + b$ का शून्यक α है तब $f(\alpha) = a\alpha + b = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{-b}{a} = \frac{(\text{अचर गुणांक})}{x \text{ का गुणांक}}$ इससे स्पष्ट है कि बहुपद के शून्यक उसके गुणांको से सम्बन्धित होते है।

LHC5BY

3.03 द्विघाती बहुपद के शून्यकों तथा गुणांको में सम्बन्ध

हमने पिछली कक्षा में बहुपदों के गुणनखण्डन का अभ्यास किया है। द्विघाती बहुपद के गुणनखण्डन में इनके मध्य पद को दो पदों में इस प्रकार विभक्त किया जाता है कि प्राप्त दोनों पदों का गुणनफल बहुपद के प्रथम एवं तृतीय पदों के गुणनफल के बराबर हो। यहाँ यह स्पष्ट करना आवश्यक है कि द्विघातीय बहुपद में दो शून्यक (वास्तविक/काल्पनिक) होते हैं। द्विघातीय बहुपद के शून्यको एवं गुणांकों में सम्बन्ध समझने का प्रयास करते है।

व्यापक रूपः माना द्विघात बहुपद $f(x) = ax^2 + bx + c$ के शून्यक α तथा β है तब $(x-\alpha)$ एवं $(x-\beta)$ बहुपद f(x) के गुणनखण्ड होंगे। अतः स्थिरांक k के लिए निम्न प्रकार लिखा जा सकता है कि $f(x) = k(x-\alpha)(x-\beta)$

अर्थात् $\quad ax^2 + bx + c = k[x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta]$

या $\quad ax^2 + bx + c = kx^2 - k(\alpha+\beta)x + k\alpha\beta$

दोनों पक्षों में x^2, x के गुणांक तथा अचर पदों की तुलना करने पर, $a = k, b = -k(\alpha+\beta)$ तथा $c = k\alpha\beta$

इनको निम्न प्रकार लिखा जा सकता है

$$\alpha + \beta = \frac{-b}{a} \quad \text{तथा} \quad \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

अतः बहुपद $f(x) = ax^2 + bx + c$ के लिए स्पष्ट है कि शून्यकों का योग $= \frac{-b}{a} = \frac{-(x \text{का गुणांक})}{x^2 \text{का गुणांक}}$

तथा शून्यकों का गुणनफल $= \frac{c}{a} = \frac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{का गुणांक}}$

उदाहरण-1. द्विघात बहुपद $x^2 - 2x - 8$ के शून्यक ज्ञात कीजिए। और शून्यक एवं गुणांकों के बीच के सम्बन्ध की सत्यता की जाँच कीजिए।

हलः माना $\quad f(x) = x^2 - 2x - 8 = x^2 - 4x + 2x - 8$

$\quad = x^2 - 4x + 2x - 8 = x(x-4) + 2(x-4) = (x+2)(x-4)$

अब $\quad f(x) = 0$ लेने पर $(x+2)(x-4) = 0$

या $\quad x + 2 = 0 \quad$ या $\quad x - 4 = 0$

या $\quad x = -2 \quad$ या $\quad x = 4$

अतः बहुपद $f(x) = x^2 - 2x - 8$ के शून्यक –2 और 4 होंगे

यहाँ शून्यकों का योग $= -2 + 4 = 2$

अर्थात् शून्यकों का योग $= \frac{-(x \text{का गुणांक})}{x^2 \text{का गुणांक}} = \frac{2}{1} = 2$

शून्यकों का गुणनफल $-2 \times 4 = -8$

अर्थात् शून्यकों का गुणनफल $= \frac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{का गुणांक}} = \frac{-8}{1} = -8$

अतः शून्यकों एवं गुणांकों के मध्य सम्बन्ध सत्य है।

उदाहरण-2. द्विघात बहुपद $3x^2+5x-2$ के शून्यक ज्ञात कीजिए तथा शून्यकों एवं गुणांको के मध्य सम्बन्ध की जाँच कीजिए।

हलः माना $f(x)=3x^2+5x-2$

या $f(x)=3x^2+6x-x-2=3x(x+2)-1(x+2)=(3x-1)(x+2)$

अब $f(x)=0$ लेने पर $(3x-1)(x+2)=0$

या $3x-1=0$ या $x+2=0$

या $x=\frac{1}{3}$ या $x=-2$

अतः बहुपद $3x^2+5x-2$ के शून्यक $1/3$ और –2 होंगे।

यहाँ शून्यकों का योग $=\frac{1}{3}+(-2)=\frac{-5}{3}=\frac{(-x \text{ का गुणांक})}{(x^2 \text{ का गुणांक})}$

शून्यकों का गुणनफल $=\frac{1}{3}\times(-2)=\frac{-2}{3}$

या शून्यकों का गुणनफल $=\frac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$

अतः बहुपद $3x^2+5x-2$ के शून्यक एवं गुणांको के मध्य सम्बन्ध सत्य है।

उदाहरण-3 एक द्विघात बहुपद ज्ञात कीजिए जिसके शून्यकों का योग तथा गुणनफल क्रमशः 1/4 और –1 हैं।

हलः माना द्विघात बहुपद ax^2+bx+c के शून्यक α और β हैं।

अतः शून्यकों का योग $=\frac{-b}{a}$

या $\alpha+\beta=\frac{-b}{a}=\frac{1}{4}$ (दिया हुआ है1) ...(i)

तथा शून्यकों का गुणनफल $=c/a$

या $\alpha\beta=\frac{c}{a}=-1$ (दिया हुआ है।) ...(ii)

यदि $a=k$, जहाँ k एक वास्तविक संख्या है तब समीकरण (i) एवं (ii) से

$b=-\frac{k}{4}$ तथा $c=-k$

अतः द्विघात बहुपद ax^2+bx+c निम्नलिखित रूप में प्राप्त होता है।

$kx^2-\frac{k}{4}x-k$ या $\frac{k}{4}(4x^2-x-4)$

अतः अभीष्ट द्विघात बहुपद $4x^2-x-4$ होगा।

प्रश्नावली 3.1

1. निम्न द्विघात बहुपदों के शून्यक ज्ञात कीजिए और शून्यकों तथा गुणांकों के बीच सम्बन्ध की सत्यता की जाँच कीजिए।

(i) $4x^2+8x$ (ii) $4x^2-4x+1$ (iii) $6x^2-x-2$

(iv) x^2-15 (v) $x^2-(\sqrt{3}+1)x+\sqrt{3}$ (vi) $3x^2-x-4$

2. एक द्विघात बहुपद ज्ञात कीजिए, जिसके शून्यकों के योग तथा गुणनफल क्रमशः दी गई संख्याएँ हैं।

(i) $-3, 2$ (ii) $\sqrt{2}, \frac{1}{3}$ (iii) $-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}$ (iv) $0, \sqrt{5}$

(v) $4, 1$ (vi) $1, 1$

3. यदि द्विघात बहुपद $f(x) = x^2 - 8x + k$ के शून्यकों के वर्गों का योग 40 हो तो k का मान ज्ञात कीजिए।

3.04 वास्तविक गुणांकों वाले बहुपदों पर विभाजन एल्गोरिथम (कलन विधि)

LVAP3E

पिछले अध्याय में हम पढ़ चुके है कि किसी पूर्णांक को दूसरे पूर्णांक से विभाजित करने पर भागफल, शेषफल प्राप्त होते है। इनमें निम्न सम्बन्ध होता है।

भाज्य = भाजक × भागफल + शेषफल

यहाँ हम पढेंगे कि बहुपदों का विभाजन भी इसी प्रकार किया जा सकता है। एक बहुपद से दूसरे बहुपद को विभाजित (भाग) करते है तब यदि शेषफल शून्य हो जाये या शेषफल की घात भाजक की घात से कम रह जाये तो हम भाग की प्रक्रिया रोक देते हैं। इस विधि को ही विभाजन एल्गोरिथम या कलन विधि कहते हैं।

इस विधि को एक उदाहरण लेकर चरणबद्ध प्रक्रिया द्वारा समझते हैं।

उदाहरणार्थ, बहुपद $f(x) = 3x^2 - x^3 - 3x + 5$ को बहुपद $g(x) = x - 1 - x^2$ द्वारा विभाजन एल्गोरिथम विधि से विभाजित करना है।

चरण–1: हम सर्वप्रथम भाजक एवं भाज्य के पदों को घटती हुई घातों के क्रम में लिखते हैं अर्थात् बहुपदों को मानक रूप में लिखते हैं। यहाँ $f(x), g(x)$ को मानक रूप में रखने पर, $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 3x + 5$ तथा $g(x) = -x^2 + x - 1$

चरण–2: अब भाज्य के उच्चतम घात वाले पद $(-x^3)$ को भाजक के उच्चतम घात वाले पद $(-x^2)$ से भाग लगाते हैं एवं भागफल (x) प्राप्त करते है। अर्थात्

$$\begin{array}{r|l} & x \\ \hline -x^2+x-1 & -x^3+3x^2-3x+5 \\ & \mp x^3 \pm x^2 \mp x \\ \hline & 2x^2-2x+5 \end{array}$$

यहाँ शेषफल $2x^2 - 2x + 5$ बचता है

चरण–3: अब नये भाज्य $2x^2 - 2x + 5$ के उच्चतम घात वाले पद $(2x^2)$ को भाजक के उच्चतम घात वाले पद $(-x^2)$ से भाग करते हैं। इसमें (–2) भागफल प्राप्त होता है अर्थात्

$$\begin{array}{r|l} & x-2 \\ \hline -x^2+x-1 & -x^3+3x^2-3x+5 \\ & \underset{+}{-x^3} \underset{-}{+x^2} \underset{+}{-x} \\ \hline & 2x^2-2x+5 \\ & \underset{-}{2x^2} \underset{+}{-2x} \underset{-}{+2} \\ \hline & 3 \end{array}$$

यहाँ शेषफल (3) प्राप्त होता है इसकी घात भाजक $-x^2 + x - 1$ से कम है अतः विभाजन प्रक्रिया यही रोक देते हैं। इस प्रकार भागफल (x – 2) एवं शेषफल (3) प्राप्त होता है। विभाजन एल्गोरिथम में निम्न कथन की जाँच करते हैं कि भाजक × भागफल + शेषफल = भाज्य

यहाँ भाजक $(-x^2 + x - 1)$, भागफल $(x - 2)$ एवं शेषफल (3) है

अतः $(-x^2 + x - 1) \times (x - 2) + 3$

$= -x^3 + x^2 - x + 2x^2 - 2x + 2 + 3$

$= -x^3 + 3x^2 - 3x + 5$ = भाज्य

इस प्रकार विभाजन एल्गोरिथम को निम्न कथन द्वारा व्यक्त किया जाता है।

विभाजन ऐल्गोरिथम– यदि $f(x)$ और $g(x)$ कोई दो बहुपद हैं, जहाँ $g(x) \neq 0$ हो तो हम बहुपद q(x) और r(x) एसे प्राप्त कर सकते हैं कि

$$f(x) = q(x)g(x) + r(x)$$

जहाँ $r(x) = 0$ या $r(x)$ की घात $< g(x)$ की घात है।

उदाहरण-4 विभाजन ऐल्गोरिथम का प्रयोग कर बहुपद $p(x) = x^4 - 3x^2 + 4x + 5$ को $g(x) = x^2 + 1 - x$ से भाग देने पर प्राप्त भागफल एवं शेषफल ज्ञात कीजिए।

हलः बहुपदों को मानक रूप में रख विभाजन प्रक्रिया करने पर,

$$\begin{array}{r|l} & x^2 + x - 3 \\ \hline x^2 - x + 1 & x^4 + 0x^3 - 3x^2 + 4x + 5 \\ & x^4 - x^3 + x^2 \\ & \underline{- \quad + \quad -} \\ & x^3 - 4x^2 + 4x + 5 \\ & x^3 - x^2 + x \\ & \underline{- \quad + \quad -} \\ & -3x2 + 3x + 5 \\ & -3x^2 + 3x - 3 \\ & \underline{+ \quad - \quad +} \\ & 8 \end{array}$$

अतः शेषफल की घात भाजक की घात से कम है अतः प्रक्रिया यही रोकनी पडेगी। इस प्रकार भागफल $= x^2 + x - 3$ एवं शेषफल '8' प्राप्त होती है। यहाँ

भाजक × भागफल + शेषफल

$= (x^2 - x + 1) \times (x^2 + x - 3) + 8$

$= x^4 - x^3 + x^2 + x^3 - x^2 + x - 3x^2 + 3x - 3 + 8$

$x^4 - 3x^2 + 4x + 5$ = भाज्य

अतः विभाजन ऐल्गोरिथम सत्यापित होता है।

उदाहरण-5 बहुपद $f(x) = 3x^4 + 6x^3 - 6x^3 - 2x^2 - 10x - 5$ के सभी शून्यक ज्ञात कीजिए यदि इसके दो शून्यक $\sqrt{\frac{5}{3}}$ और $-\sqrt{\frac{5}{3}}$ हैं।

हलः यहाँ बहुपद के दो शून्यक $\sqrt{\frac{5}{3}}$ और $-\sqrt{\frac{5}{3}}$ है।

अतः $$\left(x - \sqrt{\frac{5}{3}}\right)\left(x + \frac{\sqrt{5}}{3}\right) = x^2 - \frac{5}{3} = \frac{1}{3}(3x^2 - 5)$$ बहुपद का एक गुणनखण्ड है

अर्थात् $(3x^2 - 5)$ भी बहुपद का एक गुणनखण्ड है। अब $f(x)$ को $(3x^2 - 5)$ से विभाजित करने की प्रक्रिया करते है।

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 + 2x + 1 \\
\hline
3x^2 - 5 & 3x^4 + 6x^3 - 2x^2 - 10x - 5 \\
 & 3x^4 - 5x^2 \\
 & \underline{- \quad +} \\
 & \quad 6x^3 + 3x^2 - 10x - 5 \\
 & \quad 6x^3 \qquad - 10x \\
 & \quad \underline{- \qquad\quad +} \\
 & \qquad 3x^2 - 5 \\
 & \qquad -3x^2 - 5 \\
 & \qquad \underline{- \quad +} \\
 & \qquad\quad 0
\end{array}
$$

विभाजन एल्गोरिथम से स्पष्ट है कि भागफल (x^2+2x+1) बहुपद $f(x)$ का एक गुणनखण्ड हैं, क्योकि शेषफल 0 प्राप्त हुआ है। यहाँ गुणनखण्डन द्वारा भागफल को निम्न प्रकार लिख सकते हैं।

$$x^2+2x+1=(x+1)^2$$

इस प्रकार भाज्य = भागफल × भाजक + शेषफल

$$3x^4+6x^3-2x^2-10x-5=(x+1)^2\times(3x^2-5)+0$$

$$=(x+1)^2(\sqrt{3}x-\sqrt{5})(\sqrt{3}x+\sqrt{5})$$

चूँकि बहुपद $f(x)$ के शून्यक निकालने के लिए $f(x)=0$ संतुष्ट होना चाहिए। अतः

$$(x+1)^2(\sqrt{3}x-\sqrt{5})(\sqrt{3}x+\sqrt{5})=0$$

या $$x+1=0, x+1=0, \sqrt{3}x-\sqrt{5}=0\ \sqrt{3}x+55=0$$

अर्थात् शून्यक $-1, -1, \sqrt{\frac{5}{3}}, -\sqrt{\frac{5}{3}}$ होंगे।

प्रश्नावली 3.2

1. विभाजन एल्गोरिथम का प्रयोग करके $f(x)$ को $g(x)$ से भाग देने पर भागफल तथा शेषफल ज्ञात कीजिए।

   (i) $f(x)=3x^3+x^2+2x+5,$ $\qquad g(x)=1+2x+x^2$

   (ii) $f(x)=x^3-3x^2+5x-3,$ $\qquad g(x)=x^2-2$

   (iii) $f(x)=x^3-6x^2+11x-6,$ $\qquad g(x)=x+2$

   (iv) $f(x)=9x^4-4x^2+4,$ $\qquad g(x)=3x^2+x-1$

2. पहले बहुपद से दूसरे बहुपद को भाग करके, जाँच कीजिए कि प्रथम बहुपद दूसरे बहुपद का एक गुणनखण्ड है:

   (i) $g(x)=x^2+3x+1,$ $\qquad f(x)=3x^4+5x^3-7x^2+2x+2$

   (ii) $g(t)=t^2-3,$ $\qquad f(t)=2t^4+3t^3-2t^2-9t-12$

   (iii) $g(x)=x^3-3x+1,$ $\qquad f(x)=x^5-4x^3+x^2+3x+1$

3. निम्न बहुपदों के साथ उनके शून्यक दिये गये है, अन्य सभी शून्यक ज्ञात कीजिए।

   (i) $f(x)=2x^4-3x^3-3x^2+6x-2;$ $\sqrt{2}$ और $-\sqrt{2}$

   (ii) $f(x)=x^4-6x^3-26x^2+138x-35;$ $2\pm\sqrt{3}$

   (iii) $f(x)=x^3+13x^2+32x+20;$ -2

4. बहुपद $f(x)=x^3-3x^2+x+2$ को बहुपद $g(x)$ से भाग देने पर, भागफल $q(x)$ तथा शेषफल $r(x)$ क्रमशः $x-2$ और $-2x+4$ प्राप्त होता है, तो बहुपद $g(x)$ ज्ञात कीजिए।

3.05 द्विघात समीकरण का मानक रूप

अध्याय के प्रारम्भ में हमने द्विघात बहुपद के बारे में पढ़ा। व्यापक रूप में $f(x)=ax^2+bx+c,\ a\pm 0$ बहुपद, द्विघात बहुपद का मानक रूप है। हमने द्विघात बहुपद $f(x)=ax^2+bx+c$ के शून्यकों के बारे में पढ़ा। हम जानते हैं कि शून्यकों पर बहुपद का मान शून्य होता है। इस तथ्य को हम निम्न प्रकार व्यक्त कर सकते हैं।

यदि $f(x)$ एक द्विघात बहुपद है तो $f(x)=0$ एक द्विघात समीकरण कहलाता है अर्थात् $ax^2+bx+c=0,$ एक द्विघात समीकरण है जहाँ a, b, c वास्तविक संख्याएँ हैं तथा $a\neq 0$ यदि $f(x)$ के पदों को घातों के घटते क्रम में व्यवस्थित करें तो $f(x)=0$ अर्थात् $ax^2+bx+c=0,\ a\neq 0$ द्विघात समीकरण का मानक रूप कहलाता है।

आइये हम उदाहरणों के माध्यम से कुछ समीकरणों की जाँच करते हैं कि ये द्विघात समीकरण है या नहीं। निम्न समीकरण पर विचार करते हैं

$$(x-2)(x+1)=(x-1)(x+3)$$

बायाँ पक्ष $=(x-2)(x+1)$

$$=x^2-2x+x-2$$

$$=(x^2-x-2) \qquad \ldots(i)$$

दायाँ पक्ष $=(x-1)(x+3)$

$$x^2-x+3x-3$$

$$=x^2+2x-3 \qquad \ldots(ii)$$

दोनों पक्षों को दिये गये समीकरणानुसार बराबर रखने पर

$$x^2-x-2=x^2+2x-3$$

पक्षान्तरण करने पर $x^2-x^2-x-2x-2+3=0$

$\Rightarrow \quad -x+1=0$ या $(x-1)=0$

यहाँ समीकरण $x-1=0$ में x की घात 2 नहीं है अतः सिद्ध होता है कि समीकरण $(x-2)(x+1)=(x-1)(x+3)$ द्विघात समीकरण नहीं है।

एक अन्य समीकरण $3x^2-5x+9=x^2-7x+3$ की जाँच हेतु पक्षान्तरण करने पर हम पाते हैं कि

$$3x^2-x^2-5x+7x+9-3=0$$

$\Rightarrow \quad 2x^2+2x+7=0$

यहाँ समीकरण में x की '2' घात उपस्थित है अतः $3x^2-5x+9\ =x^2-7x+3$ एक द्विघात समीकरण है।

3.6 गुणनखण्डन विधि द्वारा द्विघात समीकरणों के हल

LVJK52

द्विघात बहुपद $f(x)$ के शून्यक, समीकरण $f(x)=0$ से x के दो मान प्राप्त होते हैं। माना $x=\alpha$ बहुपद $f(x)=ax^2+bx+c$ का एक शून्यक है, तब $f(\alpha)=0$ होगा अर्थात् $x=\alpha$ समीकरण $ax^2+bx+c=0$ को सन्तुष्ट करेगा। अतः हम कह सकते हैं कि बहुपद ax^2+bx+c का एक शून्यक $x=\alpha$ द्विघात समीकरण $ax^2+bx+c=0$ का एक मूल (Root) होगा।

इस प्रकार यदि $f(x)=0$ एक द्विघात समीकरण हो तो बहुपद $f(x)$ के शून्यक समीकरण $f(x)=0$ के मूल कहलाते हैं।

द्विघात समीकरण में चर की अधिकतम घात '2' होती है अतः इसके अधिकतम दो मूल हो सकते हैं।

किसी द्विघात समीकरण के मूल ज्ञात करने की प्रक्रिया को उस समीकरण को हल करना कहते है। द्विघात समीकरण को हल करने के लिए इसे $f(x)=0$ मानक रूप में रखते है फिर $f(x)$ व्यंजक के गुणनखण्ड करते है तथा प्रत्येक गुणनखण्ड को शून्य के बराबर रख कर x के मान ज्ञात करते हैं। x के वे मान ही द्विघात समीकरण के हल कहलाते हैं। अर्थात् इस प्रकार प्राप्त x के मान इस समीकरण के अभीष्ट मूल हैं। निम्न उदाहरणों द्वारा यह विधि स्पष्ट समझी जा सकती है।

उदाहरण-6 गुणनखण्ड विधि से द्विघात समीकरण $x^2-3x-10=0$ के मूल ज्ञात कीजिए।

हलः दिया गया समीकरण

$$x^2-3x-10=0$$

गुणनखण्ड करने पर,

$$x^2-5x+2x-10=0$$

या $\quad x(x-5)+2(x-5)=0$

या $\quad (x+2)(x-5)=0$

या $\quad x+2=0 \quad$ या $\quad x-5=0$

या $\quad x=-2 \quad$ या $\quad x=5$

अतः $x=-2$ और $x=5$ दिये गये समीकरण के दो अभीष्ट मूल है।

उदाहरण-7 गुणनखण्ड विधि से द्विघात समीकरण $52x^2+7x+5\sqrt{2}=0$ को हल कीजिए।

हलः दिया गया समीकरण

$$\sqrt{2}x^2+7x+5\sqrt{2}=0$$

गुणनखण्ड करने पर,

$$\sqrt{2}x^2+5x+2x+5\sqrt{2}=0$$

या $\quad x(\sqrt{2}x+5)+\sqrt{2}(\sqrt{2}x+5)=0$

या $\quad (\sqrt{2}x+5)(x+\sqrt{2})=0$

या $\quad \sqrt{2}x+5=0 \quad$ या $\quad x+\sqrt{2}=0$

या $\quad x=\frac{-5}{\sqrt{2}} \quad$ या $\quad x=-\sqrt{2}$

अतः $x=\frac{-5}{\sqrt{2}}$ और $x=-\sqrt{2}$ दिये गये समीकरण के अभीष्ट मूल हैं।

उदाहरण-8 निम्न द्विघात समीकरण का गुणनखण्ड विधि से मूल ज्ञात कीजिए।

$$\frac{4}{x}-3=\frac{5}{2x+3} \text{ जहाँ } x\neq 0, \frac{-3}{2}$$

हलः दिया गया समीकरण है, $\quad \frac{4}{x}-3=\frac{5}{2x+3}$

लघुत्तम लेने पर $\quad \frac{4-3x}{x}=\frac{5}{2x+3}$

वज्र गुणन करने पर निम्न प्रकार लिखा जा सकता है कि

$$(4-3x)(2x+3)=5x$$

या $\quad 8x-6x^2+12-9x=5x$

पक्षान्तरण करने पर $\quad 6x^2+6x-12=0$

अब गुणनखण्ड करने पर $6x^2 + 12x - 6x - 12 = 0$

या $6x(x+2) - 6(x+2) = 0$

या $(x+2)(6x-6) = 0$

या $x + 2 = 0$ या $6x - 6 = 0$

या $x = -2$ या $x = 1$

अतः $x = -2$ और $x = 1$ द्विघात समीकरण के अभीष्ट हल हैं।

प्रश्नावली 3.3

1. निम्न समीकरणों की जाँच कर बताइए कि क्या ये द्विघात समीकरण हैः

(i) $x(x+1) + 8 = (x+2)(x-2)$ (ii) $(x+2)^3 = x^3 - 4$

(iii) $x^2 + 3x + 1 = (x-2)^2$ (iv) $x + \frac{1}{x} + x^2,\ x \neq 0$

2. गुणनखण्ड विधि द्वारा निम्न समीकरणों को हल कीजिए।

(i) $2x^2 - 5x + 3 = 0$ (ii) $9x^2 - 3x - 2 = 0$

(iii) $\sqrt{3}x^2 + 10x + 7\sqrt{3} = 0$ (iv) $x^2 - 8x + 16 = 0$

(v) $\frac{1}{x-2} + \frac{2}{x-1} = \frac{6}{x}$ जहाँ $x \neq 1, 2$ (vi) $100x^2 - 20x + 1 = 0$

(vii) $3x^2 - 2\sqrt{6}\,x + 2 = 0$ (viii) $x^2 + 8x + 7$

(ix) $\frac{x+3}{x+2} = \frac{3x-7}{2x-3}$ (x) $4x^2 - 4a^2x + (a^4 - b^4) = 0$

(xi) $abx^2 + (b^2 - ac)x - bc = 0$

3.07 द्विघात समीकरणों का पूर्णवर्ग बनाने की विधि द्वारा हल

LVTG6P

यहाँ दिये गए द्विघात समीकरणों को चर 'x' के लिए पूर्णवर्ग रूप $(x \pm A)^2 = k^2$ में बदल लेते हैं तथा इस समीकरण में दोनों पक्षों का वर्गमूल लेकर अन्त में $x = k \pm A$ रूप में दिये गये द्विघात समीकरण के अभीष्ट मूल प्राप्त करते हैं। इस विधि को निम्न उदाहरण द्वारा स्पष्ट करते है।

दिया गया समीकरण $2x^2 - 5x + 3 = 0$ है जिसको पूर्णवर्ग विधि द्वारा हल करना है।

अतः $2x^2 - 5x + 3 = 0$ . . . (1)

या $x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{3}{2} = 0$ (x^2 का गुणांक इकाई करने पर)

या $x^2 - \frac{5}{2}x = -\frac{3}{2}$ (अचर पद का पक्षान्तरण करने पर) . . . (2)

अब समीकरण (2) के वाम पक्ष (LHS) को पूर्ण वर्ग बनाने के लिए x के गुणांक के आधे का वर्ग दोनों पक्षों में जोड़ने पर, हमे निम्न समीकरण प्राप्त होता है।

$$x^2 - \frac{5}{2}x + \left(\frac{5}{4}\right)^2 = -\frac{3}{2} + \left(\frac{5}{4}\right)^2$$

वाम पक्ष को पूर्ण वर्ग रूप में लिखने पर दाँये पक्ष को सरल कर हम $(x \pm A)^2 = k^2$ रूप प्राप्त करते हैं

अर्थात् $\left(x-\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{-24+25}{16} = \frac{1}{16}$

या $\left(x-\frac{5}{4}\right)^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2$

अब दोनों पक्षों का वर्गमूल लेने पर,

$$x-\frac{5}{4} = \pm\frac{1}{4} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{5}{4}\pm\frac{1}{4}$$

या $x = \frac{5}{4}+\frac{1}{4}$ या $x = \frac{5}{4}-\frac{1}{4}$

या $x = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$ या $x = \frac{4}{4} = 1$

इस प्रकार $x = \frac{3}{2}$ और $x = 1$ दिये गए समीकरण $2x^2-5x+3=0$ के अभिष्ठ मूल प्राप्त होते हैं।

यहाँ यह स्पष्ट करना आवश्यक है कि यदि दिए गए द्विघात समीकरण का पूर्णवर्ग रूप $(x\pm A)^2 = -k^2$ प्राप्त होता है तो x के मान, वास्तविक मान नहीं होंगे। अर्थात् दिए गए समीकरण के कोई वास्तविक मूल नहीं होंगे।

इस प्रकार के द्विघात समीकरणों को भारतीय गणितज्ञ श्रीधर आचार्य द्वार प्रतिपादित द्विघात सूत्र (Quadratic formula) द्वारा हल किया जा सकता है।

माना द्विघात समीकरण $ax^2+bx+c=0, a\neq 0$ है

यहाँ $ax^2+bx+c=0$

$$\Rightarrow \quad x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0 \qquad \Rightarrow \quad x^2+\frac{b}{a}x = \frac{-c}{a}$$

वाम पक्ष को पूर्ण वर्ग बनाने के लिए x के गुणक के आधे का वर्ग दोनों और जोड़ने पर,

$$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{-c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

या $$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{-4ac+b^2}{4a^2}$$

दोनों पक्षों का वर्गमूल लेने पर

$$x+\frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$$

या $$x = -\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{2a}}$$

अर्थात् दिये गये समीकरण के मूल निम्ननुसार प्राप्त होते हैं,

$$x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

यहाँ यदि $(b^2-4ac)\geq 0,$ है तो ही x के मान वास्तविक होंगे। अतः द्विघात समीकरण $ax^2+bx+c=0, a\neq 0$ के

लिए श्रीधर आचार्य द्विघाती सूत्र (Quadratic formula) इस प्रकार प्राप्त होता है

$$x = -\frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \text{ जहाँ } (b^2 - 4ac) \geq 0$$

उदाहरण-9 द्विघात समीकरण $2x^2 - 7x + 3 = 0$ को पूर्ण वर्ग बनाने की विधि द्वारा हल कीजिए तथा श्रीधर आचार्य द्विघाती सूत्र से मूलों का सत्यापन कीजिए।

हलः दिया गया समीकरण है–

$$2x^2 - 7x + 3 = 0$$

या $$x^2 - \frac{7}{2}x + \frac{3}{2} = 0$$

या $$x^2 - \frac{7}{2}x = \frac{-3}{2}$$

वाम पक्ष को पूर्ण वर्ग बनाने हेतु x के गुणांक के आधे का वर्ग दोनों पक्षों में जोड़ने पर,

$$x^2 - \frac{7}{2}x + \left(\frac{7}{4}\right)^2 = \frac{-3}{2} + \left(\frac{7}{4}\right)^2$$

या $$\left(x - \frac{7}{4}\right)^2 = \frac{-24 + 49}{16} = \frac{25}{16}$$

या $$\left(x - \frac{7}{4}\right)^2 = \left(\frac{5}{4}\right)^2$$

दोनों पक्षों का वर्गमूल लेने पर

$$x - \frac{7}{4} = \pm\frac{5}{4}$$

या $$x - \frac{7}{4} = \frac{5}{4}$$ या $$x - \frac{7}{4} = \frac{-5}{4}$$

या $$x = \frac{7}{4} + \frac{5}{4} = 3$$ या $$x = \frac{7}{4} - \frac{5}{4} = \frac{1}{2}$$

अतः $x = 3$ और 1/2 दिये गये द्विघात समीकरण के हल हैं।

श्रीधर आचार्य द्विघात सूत्र से सत्यापन

द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ की तुलना दिये गये समीकरण $2x^2 - 7x + 3 = 0$ से करने पर $a = 2, b = -7, c = 3$ प्राप्त होते हैं।

अतः यहाँ $b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4 \times 2 \times 3 = 25 \geq 0$ अतः मूल वास्तविक होंगे अतः a, b, c के मान श्रीधर आचार्य द्विघात सूत्र में प्रतिस्थापित करने पर

$$x = \frac{+7 \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \times 2 \times 3}}{2 \times 2} = \frac{7 \pm 5}{4}$$

अतः $$x = \frac{7+5}{4}$$ या $$x = \frac{7-5}{4}$$

अर्थात् $x = 3$ और $x = 1/2$ अभीष्ट मूल प्राप्त होते हैं अतः दिये गये समीकरण का हल श्रीधर आचार्य द्विघात सूत्र से प्रमाणित होता है।

प्रश्नावली 3.4

1. पूर्ण वर्ग बनाने की विधि द्वारा निम्न द्विघात समीकरणों को हल कीजिए।

(i) $3x^2 - 5x + 2 = 0$ (ii) $5x^2 - 6x - 2 = 0$ (iii) $4x^2 + 3x + 5 = 0$ (iv) $4x^2 + 4\sqrt{3}x + 3 = 0$

(v) $2x^2 + x - 4 = 0$ (vi) $2x^2 + x + 4 = 0$ (vii) $4x^2 + 4bx - (a^2 - b^2) = 0$

2. निम्न द्विघात समीकरणों के मूल, यदि उनका अस्तित्व हो, तो श्रीधर आचार्य विधि द्वारा द्विघाती सूत्र का उपयोग करके ज्ञात कीजिए।

(i) $2x^2 - 2\sqrt{2} + 1 = 0$ (ii) $9x^2 + 7x - 2 = 0$ (iii) $x + \frac{1}{x} = 3, x \neq 0$

(iv) $\sqrt{2}\,x^2 + 7x + 5\sqrt{2} = 0$ (v) $x^2 + 4x + 5 = 0$

(vi) $\frac{1}{x} - \frac{1}{x-2} = 3,\ x \neq 0, 2$

3. दो ऐसे क्रमागत विषम धनात्मक पूर्णांक ज्ञात कीजिए, जिनके वर्गों का योग 290 हो।
4. दो संख्याओं के वर्गों का अन्तर 45 है तथा छोटी संख्या का वर्ग बड़ी संख्या का चार गुना है। दोनों संख्याएँ ज्ञात कीजिए।
5. 16 को दो भागों में इस प्रकार विभाजित कीजिए कि बड़े भाग के वर्ग का दो गुना छोटे भाग के वर्ग से 164 अधिक हो।

LH3C8C

3.08 विविक्तिकर तथा मूलों की प्रकृति

पिछले अनुच्छेदों में हमने द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$ को गुणनखण्डन विधि, पूर्णवर्ग विधि एवं श्रीधर आचार्य विधि से हल करने के बारे में पढ़ा। अनुच्छेद 3.7 में हमने श्रीधर आचार्य विधि द्वारा द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के मूल प्राप्त करने के लिए निम्न द्विघाती सूत्र का प्रयोग किया।

सूत्र
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad \ldots \text{(i)}$$

जहाँ वास्तविक मूलों के लिए $(b^2 - 4ac) \geq 0$ होता है। इससे हमें द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के दो वास्तविक मूल प्राप्त होते हैं। यदि $(b^2 - 4ac) < 0$ होगा तो द्विघात समीकरण के मूल वास्तविक नहीं होंगे क्योंकि $(b^2 - 4ac)$ ऋणात्मक होगी एवं इसका वर्गमूल काल्पनिक होगा।

अतः उपर्युक्त विवेचना से स्पष्ट है कि मूलों की प्रकृति $(b^2 - 4ac)$ पर आधारित है इसलिये $(b^2 - 4ac)$ को द्विघात समीकरण $ax^2 - bx + c = 0$ का 'विविक्तिकर' (Discriminant) कहते हैं।

द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के 'विविक्तिकर' $(b^2 - 4ac)$ के विभिन्न प्रकार के मानों के अनुरूप इसके मूलों की प्रकृति का निर्धारण निम्न प्रकार किया जाता है।

(i) यदि $(b^2 - 4ac) > 0$ है तो द्विघात समीकरण के मूल वास्तविक एवं भिन्न होंगे। यदि मूल α, β से व्यक्त करें तो–

$$\alpha = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \beta = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

(ii) यदि $(b^2 - 4ac) = 0$ है तो मूल वास्तविक तथा समान होंगे अर्थात् $\alpha = \frac{-b}{2a}, \beta = \frac{-b}{2a}$

(iii) यदि $(b^2 - 4ac) < 0$ तो द्विघात समीकरण के मूल काल्पनिक होंगे।

अब हम निम्न उदाहरणों द्वारा द्विघात समीकरणों के मूलों की तीनों प्रकार की प्रकृति को स्पष्ट रूप से समझ सकते हैं।

उदाहरण-10 निम्न द्विघात समीकरणों के मूलों की प्रकृति ज्ञात कीजिए तथा मूलों का अस्तित्व हो तो उन्हें ज्ञात कीजिए।

(i) $2x^2 - 6x + 3 = 0$ (ii) $3x^2 - 4\sqrt{3}\,x + 4 = 0$ (iii) $x^2 + x + 1 = 0$

हलः (i) दिया गया द्विघात समीकरण है

$$2x^2 - 6x + 3 = 0$$

इनकी तुलना $ax^2 + bx + c = 0$ से करने पर निम्न मान प्राप्त होते हैं

$$a = 2, b = -6, c = 3$$

अब विविक्तिकर $(b^2 - 4ac)$ की जाँच करते हैं,

यहाँ विविक्तकर $b^2 - 4ac = 12 > 0$ धनात्मक है अतः समीकरण $2x^2 - 6x + 3 = 0$ के मूल वास्तविक एवं भिन्न होंगे

अतः श्रीधर आचार्य द्विघात सूत्र $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ द्वारा दोनों अभीष्ट मूल $x = \dfrac{+6 \pm \sqrt{12}}{4}$ होंगे अर्थात् $x = \dfrac{3+\sqrt{3}}{2}$ या $x = \dfrac{3-\sqrt{3}}{2}$

(ii) यहाँ समीकरण $3x^2 - 4\sqrt{3}x + 4 = 0$ हैं, इसकी $ax^2 + 3x + c = 0$ से तुलना करने पर a, b, c के मान $a = 3,\ b = -4\sqrt{3},\ c = 4$ प्राप्त होते हैं,

अतः विविक्तिकर $(b^2 - 4ac)$ की जाँच करने पर, विविक्तकर

$$(b^2 - 4ac) = (-4\sqrt{3})^2 - 4 \times 3 \times 4 = 48 - 48 = 0$$

अतः द्विघात समीकरण $3x^2 - 4\sqrt{3}x + 4 = 0$ के दोनों मूल वास्तविक एवं समान होंगे। श्रीधर आचार्य द्विघात सूत्र $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ द्वारा दोनों मूल

$$x = \frac{4\sqrt{3} \pm 0}{2 \times 3} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

(iii) दिया गया समीकरण है, $x^2 + x + 1 = 0$

इसकी $ax^2 + bx + c = 0$ से तुलना करने पर $a = 1, b = 1, c = 1$ प्राप्त होते हैं। अतः विविक्तकर $(b^2 - 4ac)$ की जाँच करने पर,

विविक्तकर $(b^2 - 4ac) = 1 - 4 = -3 < 0$ यहाँ $(b^2 - 4ac) < 0$ है अतः द्विघात समीकरण $x^2 + x + 1 = 0$ के दोनों मूल काल्पनिक होंगे।

प्रश्नावली 3.5

1. निम्न द्विघात समीकरणों के मूलों की प्रकृति ज्ञात कीजिए।

   (i) $2x^2 - 3x + 5 = 0$ (ii) $2x^2 - 4x + 3 = 0$ (iii) $2x^2 + x - 1 = 0$ (iv) $x^2 - 4x + 4 = 0$

   (v) $2x^2 + 5x + 5 = 0$ (vi) $3x^2 - 2x + \dfrac{1}{3} = 0$

2. निम्न द्विघात समीकरण में k का वह मान ज्ञात कीजिए कि उसके मूल वास्तविक तथा बराबर हों।

   (i) $kx(x-2) + 6 = 0$ (ii) $x^2 - 2(k+1)x + k^2 = 0$ (iii) $2x^2 + kx + 3 = 0$

   (iv) $(k+1)x^2 - 2(k-1)x + 1 = 0$ (v) $(k+4)x^2 + (k+1)x + 1 = 0$

   (vi) $kx^2 - 5x + k = 0$

3. k के ऐसे मान ज्ञात कीजिए जिनके लिए निम्नलिखित द्विघात समीकरणों के मूल वास्तविक व भिन्न हों

   (i) $kx^2 + 2x + 1 = 0$ (ii) $kx^2 + 6x + 1$ (iii) $x^2 - kx + 9 = 0$

4. K के ऐसे मान ज्ञात कीजिए जिनके लिए समीकरण $x^2+5kx+16=0$ के मूल वास्तविक नहीं हो।

5. यदि द्विघात समीकरण $(b-c)x^2+(c-a)x+(a-b)=0$ के मूल वास्तविक व बराबर हो तो सिद्ध कीजिए कि $2b=a+c$

3.09 बीजीय व्यंजकों के लघुत्तम समापवर्तक एवं महत्तम समापवर्तक

LHC89Z

हमने पिछले अध्याय में वास्तविक संख्याओं के धनात्मक पूर्णांकों के लघुत्तम समापवर्तक एवं महत्तम समापवर्तक अंक गणित की मूलभूत प्रमेय का प्रयोग कर ज्ञात किये थे। लघुत्तम समापवर्तक (LCM) गुणनखण्डन से प्राप्त संख्याओं में सम्बद्ध प्रत्येक अभाज्य गुणनखण्ड की सबसे बड़ी घात का गुणनफल होता है जबकि महत्तम समापवर्तक (HCF) गुणनखण्डन से प्राप्त संख्याओं में प्रत्येक उभयनिष्ठ अभाज्य गुणनखण्ड की सबसे छोटी घात का गुणनफल होता है।

यहाँ हम बीजीय व्यंजकों के LCM एवं HCM ज्ञात करने के बारे में अध्ययन करेंगे। बीजीय व्यंजक या दिये गये बहुपदों के लघुत्तम समापवर्तक एवं महत्तम समापवर्तक निम्न प्रकार परिभाषित किये जाते हैं।

लघुत्तम समापवर्तक (LCM)

दिये गये व्यंजकों $u(x)$ तथा $v(x)$ का लघुत्तम समापवर्तक न्यूनतम घात के बहुपद तथा न्यूनतम घात के संख्यात्मक गुणांक के गुणनफल वाला ऐसा बहुपद होता है जिसको $u(x)$ एवं $v(x)$ दोनों का भाग चला जाता है। यहाँ इसके उच्चतम घात के पद के गुणांक का चिह्न वही होता है जो गुणनफल $u(x), v(x)$ के उच्चतम घात के पद का है।

महत्तम समापवर्तक (HCF)

दो व्यंजकों $u(x)$ तथा $v(x)$ में विद्यमान समस्त सार्वगुणनखण्डों में उच्चतम घात वाले गुणनखण्डों का गुणनफल ही इन बहुपदों का महत्तम समापवर्तक कहलाता है तथा इसका गुणांक धनात्मक लेते हैं। अतः दिये गये बहुपदों का (HCF) उनके उच्चतम घात का सर्वनिष्ठ व्यंजक तथा संख्यात्मक गुणांकों के महत्तम भाजक को गुणा करके प्राप्त करते हैं। किसी बहुपद के लघुत्तम समावर्तक एवं महत्तम समापवर्तकों के लिए निम्न सम्बन्ध यहाँ भी सत्य है कि यदि $u(x)$ तथा $v(x)$ दो बहुपद है तो इनके लघुत्तम समापवर्तक (LCM) एवं महत्तम समापवर्तक (HCF) का गुणनफल इन बहुपदों के गुणनफल के बराबर होता है। अर्थात्

$$\text{LCM} \times \text{HCF} = u(x) \times v(x)$$

इस अनुच्छेद में सार्वगुणनखण्ड (common factor) का अर्थ है एक ऐसा व्यंजक जिसका दिये गये प्रत्येक व्यंजक में भाग दिया जावे तो शेषफल शून्य बचता है तथा सर्वनिष्ठ गुणज (common multiple) से तात्पर्य यह है कि यदि f(x) एक सर्वनिष्ठ गुणज है तो यह दिये गये बहुपदों से पूर्णतया विभाजित होगा।

व्यंजकों एवं बहुपदों के लघुत्तम समापवर्तक (LCM) एवं महत्तम समापवर्तक (HCF) को ज्ञात करने की विधि निम्न उदाहरणों द्वारा स्पष्ट रूप से समझी जा सकती है।

उदाहरण-11 निम्न व्यंजकों का लघुत्तम समापवर्तक (LCM) ज्ञात कीजिए।

(i) $4a^2b^2c$ तथा $6ab^2d$

(ii) x^2-4x+3 तथा x^2-5x+6

(iii) $-2(x-1)(x-2)(x+3)$ तथा $3(x-1)(x-2)(x+3)(x+5)$

हल: (i) माना दिये गये व्यंजक $u(x)=4a^2b^2c$ तथा $v(x)=6ab^2d$ है।

अतः गुणनखण्डन रूप में लिखने पर

$$u=2^2\times a^2\times b^2\times c$$

तथा $$v=2\times 3\times a\times b^2\times d$$

अतः सर्वनिष्ठ गुणज (common multiple)

$$=2^2\times 3^1\times a^2\times b^2\times c\times d$$

= उच्चतम घात वाले सर्वनिष्ठ गुणनखण्डों का गुणनफल

यही सर्वनिष्ठ गुणज उपरोक्त व्यंजकों का अभीष्ट लघुत्तम समापवर्तक है।

अर्थात् LCM = $12\, a^2b^2cd$

(ii) माना दिये गये बहुपद में $u(x) = x^2 - 4x + 3$ तथा $v(x) = x^2 - 5x + 6$ हैं।

इनको गुणनखण्ड रूप में लिखने पर

$$u(x) = x^2 - 4x + 3 = x^2 - 3x - x + 3$$
$$= x(x-3) - 1(x-3) = (x-3)(x-1) \qquad \ldots (1)$$

तथा $$v(x) = x^2 - 5x + 6 = x^2 - 3x - 2x + 6$$
$$= x(x-3) - 2(x-3) = (x-3)(x-2) \qquad \ldots (2)$$

समीकरण (1) एवं (2) से स्पष्ट है कि अभाज्य गुणनखण्डों की उच्चतम घातों का गुणनफल

$$= (x-1) \times (x-2) \times (x-3)$$

अतः अभिष्ठ लघुत्तम समापवर्तक LCM $= (x-1)(x-2)(x-3)$ होगा।

(iii) माना दिये गये बहुपद

$u(x) = -2(x-1)(x-2)(x+3)$ तथा

$v(x) = 3(x-1)(x-2)(x+3)(x+5)$ हैं।

यहाँ अवलोकन मात्र से लिखा जा सकता है कि सर्वनिष्ठ गुणनखण्डों का गुणनफल

$$= -2 \times 3 \times (x-1) \times (x-2) \times (x+3) \times (x+5)$$

है। यहाँ इस गुणनफल में उच्चतम घात के गुणनफल का चिह्न वही है जो $u(x) \times v(x)$ के उच्चतम घात के पद $-6x^7$ का है।

अतः अभीष्ट लघुत्तम समापवर्तक $= -6(x-1)(x-2)(x+3)(x+5)$ है।

उदाहरण-12 निम्न व्यंजकों का महत्तम समापवर्तक (HCF) ज्ञात कीजिए।

(i) $8a^2b^2c$ तथा $18ab^3c^2$ (ii) $20x^2 - 9x + 1$ तथा $5x^2 - 6x + 1$

(iii) $(x+1)^2(x+2)^2(x+3)^2$ तथा $(x+1)^3(x-2)^2(x+3)^3$

हल: (i) माना दिये गये व्यंजक $u = 8a^2b^2c$ तथा $v = 18ab^3c^2$

अतः गुणनखण्डन रूप में लिखने पर $u = 2^3 \times a^2 \times b^2 \times c$ तथा $v = 2 \times 3^2 \times a \times b^3 \times c^2$

यहाँ महत्तम घात का सर्वनिष्ठ भाजक $= 2 \times a \times b^2 \times c$

या = न्यूनतम घात के सर्वनिष्ठ गुणनखण्डों का गुणनफल

अतः अभीष्ट महत्तम समापवर्तक (HCF) = $2ab^2c$ है।

(ii) माना दिये गये बहुपद $u(x) = 20x^2 - 9x + 1$ तथा $v(x) = 5x^2 - 6x + 1$ है।

इनको गुणनखण्ड रूप में लिखने पर,

$$u(x) = 20x^2 - 9x + 1 = 20x^2 - 5x - 4x + 1$$
$$= 5x(4x-1) - 1(4x-1) = (4x-1)(5x-1) \qquad \ldots (1)$$

तथा $$v(x) = 5x^2 - 6x + 1 = 5x^2 - 5x - x + 1$$
$$= 5x(x-1) - 1(x-1) = (x-1)(5x-1) \qquad \ldots (2)$$

समीकरण (1) एवं (2) से स्पष्ट है कि महत्तम घात का सर्वनिष्ठ भाजक $(5x-1)$ है।

अतः अभीष्ट महत्तम समापवर्तक $= (5x-1)$ है।

(iii) माना $u(x) = (x+1)^2(x+2)^2(x+3)^2$ तथा $v(x) = (x+1)^3(x-2)^2(x+3)^3$

अतः महत्तम घात का सर्वनिष्ठ भाजक $= (x+1)^2(x+3)^2$

= न्यूनतम घात के सर्वनिष्ठ गुणनखण्डों का गुणनफल

अर्थात् अभीष्ट महत्तम समापवर्तक (HCF) $= (x+1)^2(x+3)^2$ है।

प्रश्नावली 3.6

1. निम्नलिखित व्यंजकों के लघुत्तम समापवर्तक ज्ञात कीजिए।

(i) $24x^2yz$ और $27x^4y^2z^2$
(ii) x^2-3x+2 और $x^4+x^3-6x^2$
(iii) $2x^2-8$ और x^2-5x+6
(iv) x^2-1; $(x^2+1)(x+1)$ तथा x^2+x-1
(v) $18(6x^4+x^3-x^2)$ और $45(2x^6+3x^5+x^4)$

2. निम्नलिखित व्यंजकों के महत्तम समावर्तक ज्ञात कीजिए।

(i) a^3b^4, ab^5, a^2b^8
(ii) $16x^2y^2, 48x^4z$
(iii) $x^2-7x+12$; $x^2-10x+21$ तथा $x^2+2x-15$
(iv) $(x+3)^2(x-2)$ और $(x+3)(x-2)^2$
(v) $24(6x^4-x^3-2x^2)$ और $20(6x^6+3x^5+x^4)$

3. यदि $u(x)=(x-1)^2$ तथा $v(x)=(x^2-1)$ हो तो सम्बन्ध $LCM\times HCF=u(x)\times v(x)$ की सत्यता की जाँच कीजिए।

4. दो व्यंजकों का गुणनफल $(x-7)(x^2+8x+12)$ है। यदि इन व्यंजकों का महत्तम समापवर्तक (HCF), $(x+6)$ है तो इनका लघुत्तम समापवर्तक (LCM) ज्ञात कीजिए।

5. दो द्विघातीय व्यंजकों का HCF एवं LCM क्रमशः $(x-5)$ तथा $x^3-19x-30$ है तो दोनों व्यंजकों को ज्ञात कीजिए।

विविध प्रश्नमाला–3

1. यदि बहुपद $f(x)=5x^2+13x+k$ का एक शून्यक दूसरे का व्युत्क्रम हो, तो k का मान होगा–

(क) 0 (ख) 1/5 (ग) 5 (घ) 6

2. बहुपद x^2-x-6 के शून्यक हैं

(क) 1, 6 (ख) 2, –3 (ग) 3, – (घ) 1, –6

3. यदि बहुपद $2x^2+x+k$ का एक शून्यक 3 है तो k का मान होगा–

(क) 12 (ख) 21 (ग) 24 (घ) – 21

4. यदि α,β बहुपद $x^2-p(x+1)-c$ के शून्यक इस प्रकार है कि $(\alpha+1)(\beta+1)=0$ है तो c का मान होगा–

(क) 0 (ख) –1 (ग) 1 (घ) 2

5. यदि द्विघात समीकरण $x^2-kx+4=0$ के मूल समान हो तो k का मान होगा–

(क) 2 (ख) 1 (ग) 4 (घ) 3

6. यदि $x=1$, समीकरण $ax^2+ax+3=0$ तथा $x^2+x+b=0$ का एक उभयनिष्ठ मूल है, तो $a\,b$ का मान होगा–

(क) 1 (ख) 3.5 (ग) 6 (घ) 3

7. द्विघात समीकरण $3\sqrt{3}\,x^2+10x+\sqrt{3}=0$ का विविक्तिकर होगा–

(क) 10 (ख) 64 (ग) 46 (घ) 30

8. द्विघात समीकरण $4x^2-12x-9=0$ के मूलों की प्रकृति है–

(क) वास्तविक एवं समान
(ख) वास्तविक एवं भिन्न
(ग) काल्पनिक एवं समान
(घ) काल्पनिक एवं भिन्न

9. व्यंजकों $8a^2b^2c$ तथा $20ab^3c^2$ का HCF है–

(क) $4ab^2c$ (ख) $4abc$ (ग) $40a^2b^3c^2$ (घ) $40abc$

10. व्यंजकों x^2-1 तथा x^2+2x+1 का LCM है–

(क) $x+1$ (ख) $(x^2-1)(x+1)$ (ग) $(x-1)(x+1)^2$ (घ) $(x^2-1)(x+1)^2$

11. व्यंजक $6x^2y^4$ तथा $10xy^2$ का LCM $30x^2y^4$ है तो HCF होगा–

(क) $6x^2y^2$ (ख) $2xy^2$ (ग) $10x^2y^4$ (घ) $60x^3y^6$

12. द्विघात समीकरण $ax^2+bx+c=0$ के मूल ज्ञात करने की श्रीधर आचार्य सूत्र लिखिए।

13. समीकरण $ax^2+by+c=0$ के विविक्तिकर का व्यापक रूप लिखकर मूलों की प्रकृति समझाइए।

14. द्विघात बहुपद $2x^2-8x+6$ के शून्यक ज्ञात कीजिए और शून्यकों एवं गुणांकों के बीच के सम्बन्ध की सत्यता की जाँच कीजिए।

15. यदि α और β द्विघात बहुपद $f(x)=x^2-px+q$ के शून्यक है, तो निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए।

(i) $\alpha^2+\beta^2$ (ii) $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}$

16. यदि बहुपद $x^4-6x^3+16x^2-25x+10$ को एक अन्य बहुपद x^2-2x+k से भाग दिया जाता है और शेषफल $(x+a)$ आता है, तो k तथा a का मान ज्ञात कीजिए।

17. एक आयताकार भूखंड का क्षेत्रफल 528 मी^{2} है। भूखंड की लम्बाई (मीटर में), चौड़ाई के दोगुनें से 1 अधिक है। अभीष्ट द्विघात समीकरण निरूपित कर भूखंड की लम्बाई तथा चौड़ाई ज्ञात कीजिए।

18. द्विघात समीकरण $x^2+4x-5=0$ को पूर्णवर्ग बनाने की विधि द्वारा हल कीजिए।

19. निम्न समीकरणों को गुणनखण्डन विधि से हल कीजिए।

(i) $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x-2}=3,\quad x\neq 0,2$ (ii) $\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+5}=\dfrac{6}{7},\quad x\neq 1,-5$

(iii) $x-\dfrac{1}{x}=3,\quad x\neq 0$ (iv) $\dfrac{1}{x+4}-\dfrac{1}{x-7}=\dfrac{11}{30},\quad x\neq 4,7$

20. यदि द्विघात समीकरण $2x^2+px-15=0$ का एक मूल –5 है तथा द्विघात समीकरण $p(x^2+x)+k=0$ के मूल बराबर हों तो k का मान ज्ञात कीजिए।

21. श्रीधर आचार्य द्विघाती सूत्र का उपयोग करके निम्न द्विघात समीकरणों को हल कीजिए।

(i) $p^2x^2+(p^2-q^2)x-q^2=0$ (ii) $9x^2-9(a+b)x+(2a^2+5ab+2b^2)=0$

22. दो द्विघातीय व्यंजकों के लघुत्तम समापवर्तक एवं महत्तम समापवर्तक क्रमशः x^3-7x+6 एवं $(x-1)$ है। व्यंजक ज्ञात कीजिए।

23. दो बहुपदों का लघुत्तम समापवर्तक $x^3-6x^2+3x+10$ है तथा महत्तम समापवर्तक $(x-1)$ है। यदि एक बहुपद x^2-4x-5 है तो दूसरा बहुपद ज्ञात कीजिए।

महत्वपूर्ण बिन्दु

1. व्यापक रूप में $ax+b$ रैखिक, ax^2+bx+c द्विघातीय तथा ax^3+bx^2+cx+d त्रिघातीय बहुपद कहलाते हैं।
3. बहुपद $f(x)$ का मान x के जिस मान के लिए शून्य प्राप्त होता है, x के उन मानों को बहुपद $f(x)$ के शून्यक कहते हैं।
3. बहुपद के 'शून्यकों' की संख्या इसकी उच्चतम घात के बराबर होती है। एक द्विघात बहुपद के अधिकतम दो शून्यक होते हैं।
4. यदि ax^2+bx+c के शून्यक α, β है तो $(\alpha+\beta)=\dfrac{-b}{a}$ तथा $\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$
5. यदि किसी द्विघात बहुपद के शून्यक α, β है तो इसे निम्न प्रकार लिखा जा सकता है,

   $k[x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta]$
6. विभाजन एल्गोरिथम (कलन विधि) – यदि $f(x)$ और $g(x)$ कोई बहुपद है तो हम बहुपद $q(x)$ और $r(x)$ ऐसे प्राप्त करते हैं कि $f(x)=q(x)\,g(x)+r(x)$ जहाँ $r(x)=0$ या $r(x)$ की घात $<g(x)$ की घात है।
7. यदि $f(x)=ax^2+bx+c$ एक द्विघात बहुपद है तो $f(x)=0, a\neq 0$ एक द्विघात समीकरण कहलाता है। बहुपद $f(x)$ के शून्यक एवं द्विघात समीकरण $f(x)=0$ के मूल एक ही होते हैं।
8. द्विघात समीकरण का हल, इसे मानक रूप $f(x)=0$ में रखकर $f(x)$ के दो रैखिक गुणनखण्ड कर प्रत्येक को शून्य के बराबर रख कर x के मान प्राप्त करना है।
9. श्रीधर आचार्य द्वारा द्विघात समीकरण $ax^2+bx+c=0,\ a\neq 0$ के मूल निम्न द्विघात सूत्र द्वारा दिये जाते है।

   $$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

   जहाँ $(b^2-4ac)>0$
10. द्विघात समीकरण $ax^2+bx+c=0,\ a\neq 0$ के मूलों की प्रकृति विविक्तिकर (b^2-4ac) के मान पर निम्न प्रकार निर्भर करती हैं

    (i) यदि $(b^2-4ac)>0$ तब मूल वास्तविक एवं भिन्न होंगे।

    (ii) यदि $(b^2-4ac)=0$ तब मूल वास्तविक एवं समान होंगे।

    (iii) यदि $(b^2-4ac)<0$ तब मूल काल्पनिक होंगे।
11. दिये गये व्यंजकों का लघुत्तम समापवर्तक (LCM) इनके उच्चतम घात वाले सर्वनिष्ठ गुणनखण्डों का गुणनफल अर्थात् सर्वनिष्ठ गुणज (common multiple) होता है। इसका चिह्न व्यंजकों के उच्चतम घात के पदों के गुणनफल से प्राप्त चिह्न ही होता है।
13. दिये गये व्यजंको का महत्तम समापवर्तक (HCF) महत्तम घात का सर्वनिष्ठ भाजक (common factor) अर्थात् व्यंजकों के न्यूनतम घात के सर्वनिष्ठ गुणनखण्डों का गुणनफल होता है।
13. यदि f(x) तथा g(x) दो व्यंजक है तो इनके लघुत्तम समापवर्तक (LCM) एवं महत्तम समापवर्तक (HCF) में निम्न सम्बन्ध होता है–

    $\text{LCM} \times \text{HCF} = f(x)\times g(x)$

उत्तरमाला

प्रश्नमाला 3.1

1. (i) –2, 0 (ii) $\frac{1}{2},\frac{1}{2}$ (iii) $\frac{2}{3},-\frac{1}{2}$ (iv) $-\sqrt{15},\sqrt{15}$ (v) $1,\sqrt{3}$ (vi) $-1,\frac{4}{3}$

2. (i) x^2+3x+2 (ii) $3x^2-3\sqrt{2}x+1$ (iii) $4x^2+x+1$ (iv) $x^2+\sqrt{5}$

(v) x^2-4x+1 (vi) x^2-x+1 3. 12

प्रश्नमाला 3.2

1. (i) $3x-5;\ 9x+10$ (ii) $x-3;\ 7x-9$ (iii) $x^2-8x+27;\ -60$ (iv) $3x^2-x;\ -x+4$

3. (i) $\frac{1}{2},1$ (ii) –5, 7 (iii) –10, –1 4. $-x^2-x-1$

प्रश्नमाला 3.3

1. (i) नहीं (ii) हाँ (iii) नहीं (iv) नहीं

2. (i) $1,\frac{3}{2}$ (ii) $-\frac{1}{3},\frac{2}{3}$ (iii) $-\sqrt{3},-\frac{7}{\sqrt{3}}$ (iv) 4, 4 (v) $3,\frac{4}{3}$ (vi) $\frac{1}{10},\frac{1}{10}$

(vii) $\sqrt{\frac{2}{3}},\sqrt{\frac{2}{3}}$ (viii) –1, –7 (ix) –1, 5 (x) $\frac{a^2+b^2}{2},\frac{a^2-b^2}{2}$ (xi) $-\frac{b}{a},\frac{c}{b}$

प्रश्नमाला 3.4

1. (i) $1,\frac{2}{3}$ (ii) $\frac{3\pm\sqrt{19}}{5}$ (iii) वास्तविक मूल नहीं है (iv) $\frac{-\sqrt{3}}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (v) $\frac{-1\pm\sqrt{33}}{4}$

(vi) वास्तविक मूल नहीं है (vii) $\frac{-(a+b)}{2},\frac{(a-b)}{2}$

2. (i) $\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}$ (ii) $\frac{2}{9},-1$ (iii) $\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$ (iv) $-\sqrt{2},\frac{-5}{\sqrt{2}}$ (v) वास्तविक मूल नहीं हैं (vi) $\frac{3\pm\sqrt{3}}{3}$

3. 11, 13 4. 9, 6 तथा 9, –6 5. 10, 6

प्रश्नमाला 3.5

1. (i) मूल वास्तविक नहीं है (ii) कोई वास्तविक मूल नहीं हैं (iii) मूल वास्तविक एवं भिन्न हैं

(iv) मूल वास्तविक एवं बराबर हैं (v) मूल वास्तविक नहीं हैं (vi) मूल वास्तविक एवं समान हैं

2. (i) $K=0,6$ (ii) $k=-\frac{1}{2}$ (iii) $k\le-2\sqrt{6},\ \ k\ge2\sqrt{6}$ (iv) k = 0, 3 (v) k = 5, –3

(vi) $k=\pm\frac{5}{2}$

3. (i) $k<1$ (ii) $k<9$ (iii) $k<-6,\ \ k>6$ 4. $\frac{-8}{5}<k<\frac{8}{5}$

प्रश्नमाला 3.6

1. (i) $216x^4y^2z^2$ (ii) $x^2(x-1)(x-2)(x+3)$ (iii) $2(x^2-4)(x-3)$ (iv) $(x^4-1)(x^2+x-1)$
(v) $90x^4(x+1)(2x+1)(3x-1)$

2. (i) ab^4 (ii) $16x^2$ (iii) $(x+3)$ (iv) $(x+3)(x-2)$ (v) $4x^2(2x+1)$

3. LCM $=(x-1)^2(x+1)$; HCF $=(x-1)$ 4. LCM $=x^2-5x-14$

5. $x^2-3x-10$ तथा $x^2-2x-15$

विविध प्रश्नमाला–3

1. (ग) 2. (ग) 3. (घ) 4. (ग) 5. (ग) 6. (घ) 7. (ख)
8. (ख) 9. (क) 10. (ग) 11. (ख)

12. $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

13. विविक्तिकर (b^2-4ac), (i) $b^2-4ac>0$, मूल वास्तविक एवं भिन्न (ii) $b^2-4ac=0$, मूल वास्तविक एवं समान (iii) $b^2-4ac<0$ तो मूल काल्पनिक होंगे।

14. 1, 3 15. (i) p^2-2q (ii) $\dfrac{p}{q}$ 16. $k=5$ और $a=-5$

17. $2x^2+x-528=0$, चौड़ाई = 16 m और लम्बाई = 33 m 18. 1, –5

19. (i) 2, –6; (ii) $\dfrac{3\pm\sqrt{3}}{3}$; (iii) $\dfrac{3\pm\sqrt{13}}{2}$; (iv) 1, 2 20. $k=\dfrac{7}{4}$

21. (i) $-1, \dfrac{q^2}{p^2}$; (ii) $\dfrac{2a+b}{3}, \dfrac{a+2b}{3}$ 22. x^2+2x-3 और x^2-3x+2 23. x^2-x-2